

## Statuts théorique et pratique des mathématiques dans la mécanique newtonienne

Marie-Françoise Biarnais

---

**Édition électronique**

URL : <http://baroque.revues.org/582>

DOI : 10.4000/baroque.582

ISSN : 2261-639X

**Éditeur :**

Centre de recherches historiques - EHESS,  
Éditions Cocagne

**Édition imprimée**

Date de publication : 15 janvier 1987

ISSN : 0067-4222

**Référence électronique**

Marie-Françoise Biarnais, « Statuts théorique et pratique des mathématiques dans la mécanique newtonienne », *Baroque* [En ligne], 12 | 1987, mis en ligne le 31 juillet 2013, consulté le 01 octobre 2016. URL : <http://baroque.revues.org/582> ; DOI : 10.4000/baroque.582

---

Ce document a été généré automatiquement le 1 octobre 2016.

© Tous droits réservés

---

# Statuts théorique et pratique des mathématiques dans la mécanique newtonienne

Marie-Françoise Biarnais

---

- 1 On<sup>1</sup> admet de coutume que l'accession progressive de la physique au statut de science s'est faite par une application de plus en plus large des mathématiques dites « pures » à l'étude de la nature. De ce point de vue, la physique deviendrait d'autant plus rigoureuse qu'elle serait plus « mathématique » et que le statut des lois naturelles tendrait vers celui des théorèmes. On admet par là même que l'étude de la nature peut réduire le plus possible son objet phénoménal - le déjà-là sensible - à un nombre ou symbole abstrait - objet forgé par l'esprit. Sans doute, ce point de vue est-il en harmonie avec la conception cartésienne de la science où la *mathesis* est proposée comme le moule en lequel se peuvent et doivent couler tout autre science.
- 2 Il resterait cependant à s'assurer que le physicien peut effectivement prendre pour modèle de rigueur la rigueur mathématique, que l'objet physique peut être dépouillé de toutes ses qualités, de tout ce qui le rend sensible et expérimentable en demeurant objet physique. Mais, procéder de la sorte ne risque-t-il pas d'ôter toute objectivité au propos du physicien ? Ou encore peut-on à la fois savoir de quels phénomènes l'on parle et en parler en « strict » mathématicien ?
- 3 Telles sont les questions que nous posons en ces lignes à propos des *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*<sup>2</sup>. Comment Newton, fondateur de la mécanique classique, formule-t-il les langages mathématiques destinés à exprimer les lois de la nature ? Leur mise en pratique est-elle vierge de difficultés ou nécessite-t-elle des réajustements incessants par rapport aux situations expérimentales auxquelles ils sont confrontés ? Nous désignons sous le vocable de « langage mathématique » tout ensemble de concepts, signes et symboles régi par des règles de fonctionnement déterminées, lui conférant donc une structure singulière et non pas simplement des modes de démonstrations différents au sein d'un même langage donné.

\*

\*\*

## I

4 I - À la section 1 du premier livre des *Principia*, Newton déclare n'exprimer les propositions « qui suivent » (sequentes) que selon le langage des premières et dernières raisons et dont très brièvement il indique les lignes directrices. Essayons tout d'abord d'identifier les caractéristiques de ce langage, jugé par le savant privilégié dans l'expression des lois de la mécanique terrestre et céleste. Notamment, ce langage est-il en sa structure interne différent du langage des fluxions produit en 1671 soit quinze ans plus tôt, dans *la Méthode des Fluxions et des Suites infinies* ?

Interrogeons la logique interne de ces deux langages, pour en préciser les relations.

5 1 - 1. Dans *la Méthode des Fluxions*, l'idée directrice consiste à « considérer les quantités comme produites par une augmentation continue à la manière de l'Espace que décrit un corps en mouvement<sup>3</sup> ». Il s'agit donc de considérer toute quantité mathématique comme engendrée par un mouvement continu. Qu'est-ce à dire au juste ? Newton précise cette idée dans le *De Quadratura Curvarum*<sup>4</sup> écrit quatre ans après la publication des *Principia* mieux encore que dans *la Méthode des Fluxions* : les lignes géométriques sont produites par le mouvement continu de points, les surfaces, par le mouvement continu de lignes, les solides par le mouvement continu de surfaces, les angles par le mouvement continu d'une ligne autour d'une de ses extrémités.

6 Pourquoi préférer des quantités engendrées par un mouvement continu plutôt que des quantités ponctuelles sommées les unes aux autres, tels les indivisibles de Cavalieri ? Dans les *Principia*, l'hypothèse d'une quantité obtenue par des quantités ponctuelles est dite trop « rigide » et pas assez « géométriques<sup>5</sup> ». Dans *la Méthode des Fluxions*, aussi bien que dans le *De Quadratura Curvarum* écrit en 1691, une quantité générée par un mouvement continu et uniforme est dite conforme à la « nature des choses ». Est-ce à dire que le langage des fluxions où interviennent de telles quantités, épouse le mouvement des choses elles-mêmes, qu'il y a entre lui et les choses une réelle correspondance ?

7 Tel est bien ce qu'admet Newton dans *la Méthode des Fluxions* : le temps qui mesure le mouvement continu de génération des quantités fluentes et de leurs fluxions ou vitesses de flux est en étroite relation avec le temps « réel » ou durée toujours égale à elle-même, selon la définition des *Principia*. Il écrit en effet<sup>6</sup> :

Je n'aurai dans (cet ouvrage) aucun égard au temps considéré comme tel ; mais je supposerai que l'une des quantités proposées de même genre doit augmenter par une fluxion uniforme à laquelle quantité je rapporterai tout le reste comme si c'était au temps ; donc par analogie cette quantité peut avec raison recevoir le nom de temps.

8 Mais, qui nous permet de dire que le mouvement continu représente ou symbolise le mieux possible ce temps réel ou durée ? Cette question dépend elle-même d'une question plus générale : jusqu'où peut aller notre connaissance des choses ? Sur ce point, Newton s'exprime sans aucune ambiguïté dans le Scholie général qui clôt les *Principia*, dans la seconde édition de 1713<sup>7</sup> :

[...] ce qu'est la substance de quoi que ce soit, nous ne le connaissons nullement, écrit Newton dans le *Scholie Général*. Nous voyons seulement les figures et couleurs

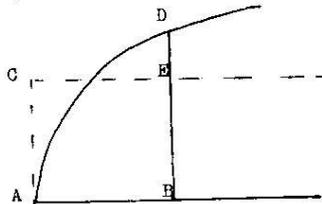
des corps, nous entendons seulement leurs sons, nous touchons seulement leurs surfaces externes, nous sentons leurs odeurs et nous goûtons leurs saveurs : mais leurs substances intimes, nous ne les connaissons par aucun sens ni aucune action réfléchie.

- 9 Ainsi le seul lien dont nous disposons pour rejoindre les « choses » est l'expérience. Par conséquent, les mathématiques elles-mêmes destinées à l'étude des mouvements des corps, objet de la physique mécanique, ne sauraient-elles se déployer à l'extérieur du cadre expérimental sans mériter le nom de mathématique hypothétique. En effet, comme le remarque Newton à plusieurs reprises<sup>8</sup> :
- 10 « La philosophie hypothétique consiste à produire des explications imaginaires, des choses et des arguments imaginaires pour ou contre... les arguments des Philosophes expérimentaux fondés sur l'Induction. Ce type de Philosophie est adopté par Descartes, Leibniz et quelques autres ».
- 11 Aussi bien, retrouve-t-on souvent sous la plume du savant ce propos<sup>9</sup> :
- Les mathématiques sont fondées sur les expériences.
- 12 Autrement dit, être fondé dans la nature pour un langage mathématique signifie, de ce point de vue, être fondé sur la mécanique pratique, c'est-à-dire sur l'expérience que nous avons des différents mouvements des corps de la nature : le mouvement d'un bateau sur l'eau, celui de la voile que le vent gonfle, celui des planètes dans leur révolution, etc. Or, soulignons-le, cette idée est une constance elle aussi et court des manuscrits de jeunesse aux *Principia*<sup>10</sup> :
- [...] la géométrie est... fondée sur la pratique mécanique (à savoir la description des lignes droites et des cercles que l'on voit décrire à tous les corps, terrestres et célestes) et elle n'est rien de plus que cette autre partie de la mécanique universelle où l'on propose et démontre l'art de mesurer avec rigueur.
- 13 Mais alors, d'où peut-on tenir avec certitude que le mouvement continu épouse le mouvement des choses mêmes puisque l'expérience ne nous fait pas atteindre ces choses-là ? L'idée paraît contradictoire. Poussons donc plus loin l'investigation en interrogeant le concept même de mouvement. Dans le *Scholie des définitions* des *Principia*, le mouvement est défini comme le changement de lieu pour un corps. Aussi bien, quand un corps se meut, il n'emporte pas avec lui son espace ni son temps de déplacement. Or, une telle définition du mouvement ne doit rien à l'évidence de l'expérience, tant s'en faut. Elle s'inscrit bien plutôt au sein d'une réflexion critique sur les concepts cartésiens de mouvement, d'espace et de temps. C'est en un texte écrit vers 1664, soit approximativement à la même époque que la découverte des fluxions, le *De Gravitatione*, que Newton produit au plein jour l'implicite de sa conception du mouvement, comme impliquant distinction de l'espace et du corps.
- 14 Précisément, se dessine en ce texte la véritable raison d'être des idées de temps et d'espace absolus : elles permettent à Dieu d'être et ce, conformément à son essence d'être parfait. En effet, le principe métaphysique qui préside ultimement à la conception newtonienne de l'espace, du temps et du mouvement est celui-ci : tout être quel qu'il soit – Dieu lui-même – doit être quelque part et persévérer en son être dans le temps :
- 15 « L'espace est<sup>11</sup> une affection de l'être en tant qu'être. Aucun être ne peut exister sans être rapporté de quelque manière à l'espace. Dieu est partout, les esprits créés sont quelque part, le corps est dans l'espace qu'il remplit et toute chose qui est ni partout ni quelque part, n'a pas d'être. On peut produire les mêmes affirmations sur la durée : autrement dit, tous les deux sont des affections ».

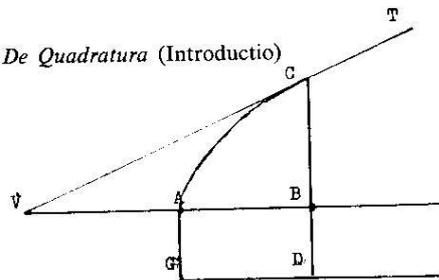
- 16 C'est cette idée qui ultimement innerve les concepts d'un temps absolu, coulant uniformément et d'un espace absolu immobile : sans espace ni temps absolus, ultimes référentiels des déterminations des êtres, Dieu n'est pas Dieu. C'est dire que de tels concepts n'ont rien d'évident en soi et surtout qu'ils ne doivent rien à l'expérience quotidienne : ils sont enracinés dans une conception toute métaphysique des déterminations de l'être.
- 17 *Partant, c'est sur une telle conception que repose le calcul des quantités fluentes et des premières et dernières raisons de ces quantités* : le mouvement continu et uniforme exprime le temps réel, comme le dit le savant en 1671, en effet.
- 18 Tel est bien le sens de ce propos tenu dans le *De quadratura*, où intervient le langage des premières et dernières raisons, comme dans les *Principia* :
- Les genèses des (quantités) mathématiques par un mouvement continu tiennent une place véritable dans la nature des choses et on les remarque quotidiennement dans le mouvement des corps.<sup>12</sup>
- 19 Mais, on le voit, les sens de l'observateur qui « remarque » ne sont en rien une *tabula rasa*, ils sont pénétrés de préconceptions métaphysiques qui les orientent vers un certain type de « naturel » et de « nature ». Or, rien ne prouve que telle est bien la nature. Car, les fondements de l'idée de continuité du mouvement qui sous-tend le calcul des fluxions ne sont pas plus « vérifiables » que « falsifiables », pour reprendre les termes de K. Popper : ils sont choisis selon des critères extra-scientifiques.
- 20 I - 2. Cela étant, si peu fondée en raison qu'elle soit, cette exigence d'un langage mathématique *naturel* pour exprimer les mouvements des corps et leurs lois n'en sous-tend pas moins le langage des fluxions. Il faut donc essayer d'en évaluer l'efficacité explicative.
- 21 I - 21. Mais, au préalable, il convient de situer le langage des premières et dernières raisons par rapport à celui des fluxions. Le premier est présenté en effet comme étant le langage exprimant les théorèmes et lois mécaniques des *Principia*, ceux-là mêmes qui ouvrent l'ère de la mécanique classique. La structure de ce langage est très brièvement présentée en la section 1<sup>13</sup> du premier livre et en dépit du fait qu'une certaine parenté d'esprit avec le langage des fluxions apparaisse ici, rien ne permet de se prononcer à ce propos avec certitude, sans une analyse comparative de ces deux langages. C'est à une telle analyse que nous procédons maintenant.
- 22 D'entrée de jeu, les quantités intervenant dans la méthode des *Principia* semblent n'être que des espèces de *quantités fluentes*. En effet, les démonstrations des propositions en cet ouvrage sont, dit l'auteur<sup>14</sup> :
- [...] (conduites) au moyen des dernières sommes et raisons de quantités évanouissantes et des premières sommes et raisons de quantités naissantes, c'est-à-dire jusqu'aux limites de ces sommes et raisons.
- 23 La différence entre les deux méthodes susdites semblerait tenir dans le mode de comparaison des quantités elles-mêmes, les limites des rapports (ou « raisons ») variables de ces quantités jouant un rôle dans les *Principia* et non, au moins dans l'expression, en 1671 dans la *Méthode des Fluxions*.
- 24 Prenons deux exemples tirés l'un de la *Méthode des fluxions* et l'autre du *De Quadratura* pour mieux cerner cette différence. Les deux ouvrages encadrent les *Principia* dans le temps, successivement en amont et en aval et, de surcroît le second fait lui aussi une grande place à la méthode des premières et dernières raisons.

- 25 Dans les deux cas, il est traité du même problème : à savoir déterminer indirectement une aire curviligne, c'est-à-dire en prenant le rapport de sa fluxion à celle d'une surface rectiligne. La construction géométrique est en outre très semblable dans l'un et l'autre cas. On mène à une droite fixe A B une droite perpendiculaire mobile et qui, de son mouvement uniforme et continu, décrit deux aires, l'une rectiligne et l'autre curviligne. On met ensuite en rapport les fluxions (ou vitesses du changement de mouvement) de ces deux aires : l'aire rectiligne étant directement calculable, et il est alors possible de déterminer l'aire curviligne par rapport à celle-ci.
- 26 La seule différence dans les constructions géométriques de ce problème en 1671<sup>15</sup> et en 1691<sup>16</sup> tient à un détail : les deux aires sont de part et d'autre de la droite fixe A B en 1691, elles sont du même côté de cette droite en 1671.

*Méthode des Fluxions*  
(Problème I, X)



*De Quadratura (Introductio)*



- 27 Comparons les démonstrations produites à l'appui de cette construction. En 1671, après avoir présenté la construction de la figure, Newton conclut<sup>17</sup> :
- 28 « Il est évident que les fluxions (des surfaces A D B et A E C), c'est-à-dire les fluxions des quantités z et x, sont entre elles comme les droites BD et BE qui les ont générées ».
- 29 D'où, l'équation :

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{BD}{BE} \text{ on en tire } \dot{z} = \dot{x} \cdot \frac{BD}{BE},$$

- 30 puisque BE est égale à l'unité.

Rappelons que les fluentes sont désignées par les dernières lettres de l'alphabet et leurs fluxions par ces lettres surmontées d'un point.

Ainsi, détermine-t-on l'aire curviligne à partir d'une quantité déterminée (BE) et de l'aire rectiligne.

- 31 Or, la « démonstration » de cette équation, pour reprendre les termes newtoniens à la proposition suivante, découle elle-même des définitions des fluentes et des fluxions<sup>18</sup> :

Les moments des quantités fluentes (c'est-à-dire leurs parties indéfiniment petites, par l'accession desquelles, dans des parties indéfiniment petites de temps, elles sont continuellement augmentées) sont comme les vitesses de leur flux ou accroissement.

- 32 Or, telle est la proposition invoquée à l'appui de la « démonstration » de l'équation produite en 1691, aux différences de terminologie près. Ici, la même équation

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{BD}{BE} \text{ s'explique :}$$

[...] parce que<sup>19</sup> les droites descriptives (BC et BD en l'occurrence) sont comme les accroissements naissants des aires.

Or, s'il en est aussi, c'est que :

Les fluxions sont aussi exactement que possible proportionnelles aux accroissements des fluentes qui sont générées en des particules de temps égaux et aussi petits que possible.

- 33 On reconnaît en cette proposition celle-là même qui justifiait la précédente équation de 1671, à la permutation des termes du rapport de proportionnalité près. Mais, l'intérêt de la comparaison de ces deux propositions ne s'arrête pas là. Il vient de ce que dans le *De Quadratura*, Newton s'exprime selon deux formalismes mathématiques, l'un « inexact », l'autre « exact » :

Pour parler exactement (*ut accurate loquar*), ajoute-t-il en effet<sup>20</sup>, elles sont en première raison des accroissements naissants (*sunt in prima ratione augmentorum nascentium*) et elles peuvent être exprimées par des lignes quelconques qui leur sont proportionnelles.

- 34 Ainsi, les deux langages des fluxions et des premières et dernières raisons sont donc étroitement dépendants l'un de l'autre : le second faisant intervenir en outre la notion de « limite » pour évaluer le rapport de croissance ou de décroissance des rapports des fluxions et fluentes avec plus de rigueur. Cette notion forme bien le cœur du langage des premières et dernières raisons comme l'atteste la fin de la Section 1 des *Principia*<sup>21</sup> :

Il existe une limite que la vitesse peut atteindre à la fin du mouvement mais qu'elle ne peut jamais dépasser. Cette limite est la « dernière vitesse ». Il en est de même pour la limite de toutes les quantités et proportions qui commencent et cessent. Et comme cette limite est certaine et définie, c'est un problème réellement géométrique que de la déterminer.

- 35 Exigence d'une certaine rigueur dans le formalisme mathématique destiné à exprimer les lois mécaniques ! Mais aussi - on l'a vu - exigence d'un formalisme « naturel » ! D'ailleurs, les deux exigences sont solidaires entre elles. C'est essentiellement parce que l'hypothèse des indivisibles n'est pas « naturelle », qu'elle impose à la nature une « rigidité » qu'elle n'a pas, qu'elle est moins « rigoureuse » et géométrique que celle des premières et dernières raisons. En effet, analyser une quantité en quantités très petites, prises pour indivisibles, tels que firent Cavalieri, Torricelli ou Wallis, pose un problème épineux : c'est arrêter la continuité du mouvement par lequel les choses, se constituent, continuité qui représente le mieux la durée réelle. Ensuite, comment obtenir une aire finie en sommant un nombre infini de lignes parallèles entre elles à l'intérieur de cette aire et représentant chacune une aire infinitésimale, comment le faire sans se heurter plus ou moins et en dépit d'aménagements subtils à la fameuse difficulté des « incommensurables » ? Il y a bien la méthode grecque d'exhaustion qui elle, est réputée rigoureuse, mais a un autre défaut : la longueur des démonstrations.
- 36 On détermine, en effet, par ce moyen les aires curvilignes en les comparant à celles des figures inscrites et circonscrites dans la courbe dont on cherche l'aire. Mais, les démonstrations de l'égalité entre l'aire curviligne et la dernière aire inscrite et entre celle-là et la dernière aire circonscrite s'effectuent par l'absurde. Ce faisant, on n'en peut nier la rigueur mais quel temps perdu à les déployer dans leur entier !
- 37 Mais, précisons ici un point capital : qui veut instaurer des principes mathématiques de la philosophie naturelle (ou, en une terminologie moderne, de la physique<sup>22</sup>) se doit bien sûr de tenir compte tant des exigences des mathématiques que de celles de la « philosophie naturelle ». La rigueur renvoie aux premières, la brièveté aux secondes. En effet, le physicien ne peut pas suivre tous les contours de ses objets, compte tenu de leurs irrégularités et diversité. Par excellence, si l'on ose dire, la physique est et demeure

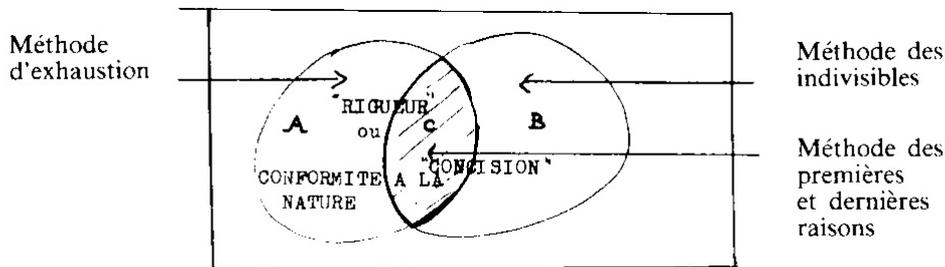
toujours aujourd'hui la science de l'approximation et de la simplification. Newton en est d'ailleurs très conscient et ce, depuis longtemps. Il écrit en effet vers 1664<sup>23</sup> :

Dans ces définitions [celles qui inaugurent la « nouvelle » mécanique de la gravitation] je ne me réfère qu'aux corps absolument durs ou aux fluides, car l'on ne peut raisonner mathématiquement sur des corps de nature intermédiaire, à cause des innombrables particularités qui tiennent aux figures, aux mouvements et à la texture des plus petites particules.

- 38 Ainsi, le physicien mesure-t-il un champ en s'appuyant sur les théories de la géométrie plane alors que le champ n'est pas plan ou la terre avec la théorie de la sphère alors que la terre est un ovoïde. Le nœud du problème posé au physicien est donc celui-ci : comment tenir compte de l'exigence d'approximation sans tomber dans l'à peu près, soit tout en restant rigoureux ?
- 39 I - 22. Le premier pas en cette voie, du point de vue de l'analyse mathématique, a été fait avec la méthode des fluxions. Comment être à la fois rigoureux et concis en analyse ?
- 40 Compte tenu de cette double exigence, les conditions formelles de la méthode recherchée doivent être doubles. Il faut d'une part que les quantités comparées dans les figures dessinées par les mouvements des différents corps de la nature (ares, aires, cordes, tangentes, etc.) soient finies pour que le raisonnement sur les raisons qu'elles ont entre elles soit aussi rigoureux que le raisonnement d'exhaustion sur les raisons des côtés de polygones. Il faut, d'autre part, que ces mêmes quantités ne soient pas conçues comme individuelles par le fait même qu'elles sont finies.
- 41 Il reste ainsi une solution à<sup>24</sup> Newton, en s'appuyant sur la méthode des fluxions : *comparer non pas les quantités fluentes elles-mêmes mais les augmentations ou incréments simultanés de ces quantités, en considérant ces incréments comme finis*. Puis, on cherche la raison qui est la limite de toutes les raisons que ces incréments ont entre eux, lorsque ces mêmes incréments sont supposés diminuer jusques à disparaître. Leur disparition implique que les quantités fluentes ne fluent plus, ou encore qu'elles sont devenues *maxima* ou *minima*, pour reprendre les termes de Newton dans *la Méthode des fluxions*. C'est pourquoi, il y a deux sortes de limites de raisons de tels incréments : la limite des raisons de ces incréments quand les quantités fluentes dont ils sont les incréments sont *maxima* ou « dernière raison » et la limite des raisons des incréments lorsque les quantités sont *minima* ou « première raison ».
- 42 Ainsi, Newton réunit-il en la méthode des premières et dernières raisons les deux exigences formelles requises pour produire des démonstrations à la fois rigoureuses et concises.
- 43 Objectera-t-on que la limite des raisons des incréments de ces quantités fluentes correspond à une raison donnée réellement et que donc les grandeurs comparées en elle sont elles-mêmes données ? Comment, en effet, ne pas admettre qu'elles sont indivisibles, dans la raison-limite ? Mais, Newton prend soin<sup>25</sup> de devancer l'objection, à la fin de la Section :
- [...] les dernières raisons avec lesquelles ces quantités s'évanouissent ne sont pas les véritables raisons des dernières quantités, mais les limites dont s'approchent toujours les raisons des quantités qui décroissent sans limite ; et, de ces limites, elles peuvent approcher à une distance moindre que n'importe quelle différence donnée ; mais jamais, elles ne les peuvent dépasser ni atteindre sinon à l'infini.
- 44 Il apparaît donc que la méthode mathématique propre aux lois mécaniques est intimement solidaire de la méthode générale des fluxions : avec celle-ci, elle partage

l'enracinement dans une certaine idée de la nature dont elle tient son caractère « naturel », mais sur celle-ci elle a l'avantage de répondre de manière mieux adaptée aux exigences d'une physique où l'on doit produire des mesures très précises pour des objets très complexes.

- 45 En effet le problème clef qu'il s'agit de dénouer dans les *Principia* consiste à identifier<sup>26</sup> les différentes forces naturelles impliquées dans les mouvements des corps et à essayer de prouver, – expérience à l'appui, que la diversité apparente des lois de ces forces pourrait être ramenée à une seule et même loi générale de forces. C'est précisément la loi de gravitation qui joue ce rôle de loi générale.
- 46 Dès lors, on peut comprendre sans peine combien la méthode des premières et dernières raisons est adaptée à divers problèmes physiques. En effet, les corps célestes – le système du Monde est le cœur même de l'œuvre – décrivant des courbes fermées, il s'agit à tout moment, pour trouver les lois de leurs mouvements, d'évaluer les *maxima* et *minima* par lesquels passent les courbes qu'ils décrivent : c'est-à-dire les limites premières et dernières des différents paramètres intervenant dans leurs mouvements.
- 47 On pourrait exprimer les caractères de cette méthode de manière plus schématique :



- 48 Ainsi, le caractère synthétique de cette méthode, en tant que méthode mathématique adaptée à un objet physique complexe, apparaît de manière plus prégnante. Notamment, il apparaît que le Newton des *Principia* a fait des progrès considérables dans la conception des critères requis pour établir une physique mathématique par rapport au tout premier texte consacré aux fondements d'une science de la gravitation, le *De gravitatione* en 1664. Voici en effet ce que le jeune « public professor in mathematics » écrivait alors<sup>27</sup> :

Il convient de traiter la science de la gravitation et de l'équilibre des fluides et des solides dans les fluides par une *méthode double*. Dans la mesure où elle appartient aux sciences mathématiques, il est juste de faire le plus possible abstraction de considération physique. C'est donc pour cette raison que j'ai décidé de démontrer strictement, à la manière des géomètres, chaque proposition de cette science, en partant de principes abstraits et suffisamment reconnus de quiconque y applique son esprit. Puis, comme on estime (aussi) que cette doctrine est d'une certaine manière apparentée à la Philosophie naturelle, en tant qu'elle convient à l'examen approfondi de la plupart des phénomènes de Philosophie naturelle et comme ainsi son utilité en est particulièrement manifeste et que la certitude de ses principes peut en être confirmée, je ne ferai pas même difficulté à illustrer les propositions au moyen d'expériences.

- 49 Il est clair qu'ici la physique mathématique est conçue comme un puzzle où des exigences de nature différente se juxtaposent et se superposent de manière simpliste. Bien au contraire, là – le schéma précédent le montre – les critères qui président au choix de la méthode mathématique exprimant les phénomènes physiques témoignent d'une conscience aiguë des difficultés impliquées dans la constitution d'une véritable « physique mathématique ». Il s'agit désormais de parvenir à faire se rencontrer les

exigences de rigueur propre au mathématicien et d'efficacité explicative – souvent simplificatrice afin que soient mises en valeur formes et figures essentielles – propre au physicien. Précisément, la méthode des premières et dernières raisons joue le rôle de charnière entre deux disciplines fort différentes l'une de l'autre par leurs objets et méthodes.

- 50 Or, tant s'en faut que ce rôle soit facile à tenir : si Képler au début du siècle a tenté de relever le défi scolastique d'une physique non mathématisable, Newton, lui, comprend que le réalisme mathématique en physique pose le problème comme résolu d'avance. Or, il y a problème, puisqu'il faut travailler sur deux claviers à la fois, irréductibles pour un humain.
- 51 Aussi, le savant proteste-t-il avec véhémence chaque fois qu'on assigne une réalité, une signification « physique » – pour reprendre ses termes – aux forces dont il décrit les lois : autrement dit, chaque fois que l'on confond forces « mathématiques » et forces « physiques », réelles.
- 52 Le réalisme mathématique une fois écarté, il faut donc accepter l'idée que le formalisme mathématique n'est plus qu'un point de vue permettant d'étudier au mieux les lois de la nature. Cette réponse à l'étonnement de Halley le prouve irréfragablement. Pourquoi, demande Halley, traiter de philosophie naturelle en mathématicien ? « Why not as a mathematician<sup>28</sup> ? » répond Newton. Mais, pour capter pleinement le sens de ce propos, il faut se souvenir que les mathématiques des *Principia* sont, non pas n'importe quelle mathématique, mais une mathématique adaptée par sa structure théorique même, à la résolution de problèmes mécaniques. Bien plus, on n'en saurait proposer de mieux adaptée à cette époque, de par sa rigueur et son articulation avec la nature même et simultanément l'efficacité que lui confère sa concision.
- 53 Tel est ce qu'il faut conclure de la méthode mathématique proposée par Newton pour traiter de mécanique : cette méthode peut être adaptée aux problèmes de « philosophie naturelle » et de surcroît une seule répond à ce critère.
- 54 Dès lors, l'on devait s'attendre à son application à la fois systématique et respectueuse de l'intégrité de sa structure théorique dans les propositions des *Principia*. En est-il effectivement ainsi ?

## II

- 55 Pour en juger, il faut procéder d'une part, à un « balayage » des propositions elles-mêmes pour identifier les occurrences d'utilisation et à un examen approfondi des cas significatifs de l'usage de la méthode elle-même, d'autre part.
- 56 II - 1. Mais quels critères retenir pour le balayage des propositions compte tenu de l'ampleur de l'œuvre composée de trois livres ?
- 57 Nous nous sommes fondés, à cette fin<sup>29</sup>, en partie sur l'avis donné par le savant lui-même au début du troisième livre : il suffit dit-il, de lire avec application les définitions, les lois de mouvements et les trois premières sections du livre premier puis de passer directement au livre III, consacrée au système du monde en se référant aux autres propositions des deux premiers livres quand il y fait référence.
- 58 Précisons que le premier livre traite du mouvement des corps *in abstracto*, c'est-à-dire sans tenir compte de la résistance que le milieu peut lui opposer par son inertie propre.

C'est en ce Livre que s'élabore la fameuse théorie des forces centrales, clef de voûte des *Principia* dans leur entier. En effet, par ce moyen, il est démontré que tous les mouvements des corps, en des courbes, quels que soient ces corps, s'effectuent sous l'action de forces tendant vers un point comme vers un centre ou forces centrales ou encore forces centripètes : la gravitation est de ce type.

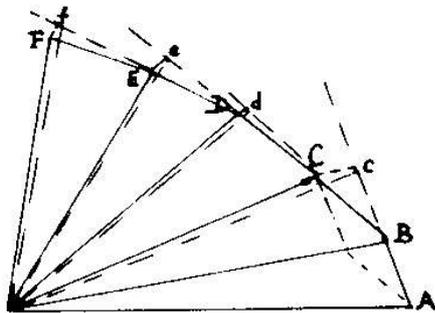
- 59 Au Livre II, il est traité du même problème qu'au Livre I mais en faisant intervenir la résistance du milieu. Quant au Livre III, il est tout entier consacré à l'exposé du *Système du monde*, centré sur la loi de gravitation universelle.
- 60 Cela étant, on commencera par balayer les propositions contenues dans les sections 2 et 3 du premier livre, la section 1 étant précisément celle-là même où la théorie de la méthode examinée est posée.
- 61 Mais, nous ne suivrons pas jusqu'au bout l'avis de Newton, compte tenu de la question soulevée en ces lignes. Ainsi, nous examinerons les propositions du Livre II où se joue la réfutation du système cartésien du monde et où donc se prépare la théorie de la gravitation universelle. Quant aux propositions du Livre III, comme elles reposent toutes explicitement ou implicitement sur les propositions des deux premiers livres, la méthode examinée ici y est, par ce fait même, mise en œuvre, autant tout au moins qu'elle l'est précédemment.
- 62 De l'examen cursif des différentes propositions significatives, retenons quelques exemples parmi les plus frappants. Soit la section II du premier livre formée de dix propositions. En la proposition I, est généralisée la loi 2 de Képler, dite « loi des aires » à tout corps quel qu'il soit. Il va sans dire que cette généralisation contribue efficacement à l'élaboration de la théorie de gravitation universelle. Or les démonstrations qui y conduisent sont réalisées grâce à l'un des lemmes de la méthode des « limites » : ce lemme permet en effet de trouver le « dernier périmètre » qu'une force centripète fait décrire à un corps et contribue ainsi à prouver que le temps de parcours d'une portion de courbe par ce corps est mesuré par l'aire curviligne décrite en ce temps.
- 63 La proposition 5 permet de déterminer le centre des forces centripètes et de trouver le foyer du mouvement des différents corps, dont les planètes principales et secondaires et les comètes. Or, les démonstrations qui sont produites à cette fin découlent directement de celles établies à la proposition 1 par la méthode des limites.
- 64 La proposition 6 enfin s'appuie explicitement sur les derniers lemmes de la section consacrée à cette méthode pour déterminer le rapport de la force centripète s'exerçant sur un corps et d'un paramètre de l'arc « naissant » parcouru en un temps très petit par ce corps : or, cette proposition sert à établir les quatre suivantes où sont déterminées des lois de forces par rapport à une fonction de la distance au centre du mouvement. Notamment, à la proposition 10 est établie la loi de force
- 65 centripète en une ellipse, celle-là même à laquelle obéissent les corps célestes, planètes et comètes.
- 66 Quant aux autres propositions de cette Section 2 qui concernent de plus loin le *Système du Monde*, toutes soit font référence aux lemmes de la Section 1 soit sont exprimées, ici et là, dans la terminologie propre à la méthode développée en ces lemmes.
- 67 Le même constat pourrait être dressé à la Section 3 qui est composée de sept propositions. Ainsi, les démonstrations des propositions 11, 12, 13 où sont déterminées les lois de forces centripètes qui font décrire aux corps des ellipses, des hyperboles et des

paraboles, sont réalisées au moyen d'un des lemmes de la méthode des limites. Il en est de même à la proposition 15 où la troisième loi de Képler sur le rapport sesquiple entre la période de révolution elliptique d'un corps et le demi-grand axe de l'ellipse est établie à partir du concept de force centrale, concept-clef de la mécanique newtonienne. Enfin, à la proposition 17, dernière proposition de la Section 3, est posé le problème inverse de la détermination de la courbe suivie par un corps quand la force que l'on suppose s'exercer sur lui est inversement proportionnelle au carré de la distance de cette courbe au centre du mouvement. Est-il besoin de préciser le rôle de premier plan que joue une telle proposition dans les démonstrations qui conduisent à la loi de gravitation universelle ? Or, cette proposition est établie à partir des résultats de la proposition 16, elle-même démontrée par le lemme 7 de la Section 1.

- 68 Un examen des propositions du Livre II qui concernent directement la réfutation du système cartésien des tourbillons conduit à des résultats similaires. Ainsi, à la proposition 3, les corollaires des lemmes 7 et 8 de la première Section permettent de comparer la force de gravité d'un corps tombant dans un milieu de résistance égale en tout point avec cette résistance au début du mouvement. On comprend sans peine la place de cette proposition par rapport au *Système du Monde* : il s'agit de mettre en évidence si les mouvements des corps sont ou non perturbés par la résistance du milieu où ils s'effectuent. Dans l'affirmative, ce qui est le cas, la thèse cartésienne tombe. De même, aux Sections 4 à 9 du même Livre qui conduisent à démontrer l'impossibilité du mouvement des planètes en un milieu fluide et résistant – celui-là même qui constitue les « tourbillons » cartésiens – les exemples de mise en œuvre de la méthode des premières et dernières raisons ne manquent pas.
- 69 Bien loin donc d'avoir élaboré un langage mathématique de structure déterminée, destiné à rendre compte des phénomènes des mouvements des corps terrestres et célestes mais peu utilisé à cette fin, Newton ne cesse de s'y référer tout au long des propositions qui font établir le Système de la gravitation universelle.
- 70 II - 2. Assurément, un tel examen cursif n'autorise en rien à préjuger de la qualité de mise en œuvre de la méthode newtonienne. Il n'autorise en rien à conclure qu'effectivement les propositions de la mécanique sont écrites dans un seul et même langage mathématique : celui-ci s'adaptant comme par bonheur à toutes les situations expérimentales rencontrées. Une telle conclusion pourrait bien alors conduire à un réalisme mathématique, cette fois a posteriori.
- 71 II - 21. Qu'en est-il exactement ? En regardant de plus près les démonstrations produites à l'appui des propositions citées entre autres, on peut remarquer tout d'abord que certaines d'entre elles sont exprimées dans le langage de la géométrie classique dite « synthétique » où les quantités sont considérées comme déjà formées et non comme générées par un mouvement continu. Assurément, pour autant qu'on en a pu juger par notre fréquentation de ce texte, le recours à un tel langage dans les propositions n'est pas scientifiquement discutable : le savant s'y réfère chaque fois qu'il n'a pas à procéder sur des quantités de très grande dimension et où un langage analytique serait un luxe inutile.
- 72 Soient les propositions 36 et 37 du deuxième livre il y est soulevé une question de mécanique des fluides qui permet d'ouvrir une large brèche dans l'édifice cartésien : à quelle vitesse un fluide s'écoule-t-il d'une fente pratiquée au fond d'un vase ? Dans la première proposition, le vase étant supposé de forme finie, Newton s'exprime réellement et non pas seulement selon la terminologie, dans un langage synthétique. Au contraire, dans la seconde proposition où le vase est supposé de forme infinie et symbolise ainsi

l'univers entier où un fluide circulerait comme à l'intérieur d'un canal dont la largeur varierait, c'est le langage analytique des premières et dernières raisons qui est retenu.

- 73 Par conséquent, si le langage analytique n'est pas employé systématiquement, au moins semble-t-il l'être à bon escient. Comme le remarque judicieusement M. Hall, il serait tout à fait inutile de « prendre un marteau pour écraser des noisettes ». En effet, se référer à la méthode des premières et dernières raisons pour décrire le comportement d'un fluide s'écoulant par une fente d'un vase de forme déterminée eut provoqué des longueurs et complexités de démonstrations qui eu fait rejeter cette méthode du même côté que celle d'exhaustion, soit dans l'ensemble (A-C). Sans doute peut-on déplorer qu'à tout moment le lecteur soit soumis à rude épreuve puisqu'il lui faut toujours identifier le langage mathématique réel sous celui qui apparaît pour pouvoir déchiffrer correctement les propositions de « philosophie naturelle ». Mais, le point le plus important qu'il faut retenir nous semble situé là : à savoir, si, idéalement parlant, on admet qu'un seul langage est requis pour traiter mathématiquement de physique, dans la pratique en revanche, cette exigence se trouve être assouplie précisément selon la nature des situations expérimentales rencontrées. Autrement dit, retenons que ces situations commandent elles-mêmes tel ou tel langage qui leur est adapté et font donc appel à une intuition de « physicien » familiarisé par une fréquentation assidue avec les phénomènes naturels les plus divers et complexes. C'est dire par là même que tel langage mathématique ne saurait être accordé comme privilégié pour traiter des phénomènes quels qu'ils soient. C'est dire enfin que la pratique des démonstrations des propositions de physique dans les *Principia* atteste indéniablement qu'il n'y a pas davantage de réalisme mathématique a posteriori que de réalisme mathématique a priori :
- 74 II - 22. Un autre aspect de cette pratique corrobore davantage encore cette attitude du physicien devant les mathématiques. En effet, il est très fréquent, pour autant qu'on a pu l'établir, qu'une même proposition ne soit pas démontrée dans le même langage mathématique. Prenons un exemple parmi les plus significatifs : celui de la proposition 1 dans la section 2 du livre I.
- 75 Une portion de courbe AF est supposée parcourue par un corps sous l'action d'une force qui retire celui-ci sans cesse de la ligne droite que sa force d'inertie lui ferait suivre.
- 76 On admet par ailleurs que cet arc AF est parcouru en un temps fini et est lui-même divisé en plusieurs arcs AB, BC, CD, DE, et EF, traversés en des temps égaux. Cela étant posé, puisque le corps se mouvrait le long de BC s'il était en mouvement inertial, et qu'il se trouve en fait en C, c'est qu'une force s'exerce sur lui et le pousse ou l'attire vers C, le long de cC. Il en est de même pour la détermination de la direction CD, DE, et EF du mouvement de ce corps.



- 77 Autrement dit, la force centripète qui s'exerce sur le corps est elle-même considérée ici comme divisée en impulsions discontinues et instantanées.
- 78 La méthode mathématique ici référencée est donc bien davantage celle des infinitésimaux que celle des limites.
- 79 Mais, il y a plus : ce n'est pas par cette seule voie que la généralisation de la loi képlérienne des aires est réalisée. La démonstration selon laquelle un corps balaie dans son mouvement de rotation des aires égales en des temps égaux sous l'action d'une force centrale, est commencée dans le langage des infinitésimaux mais terminée dans celui des limites<sup>30</sup>. C'est en effet le Lemme 3 de la Section I, relatif à l'égalité des dernières raisons de parallélogrammes dont les bases sont inégales mais diminuent à l'infini, qui permet de déterminer le « dernier périmètre » de la trajectoire suivie par le corps : soit quand le nombre des triangles croît à l'infini ou que leur largeur diminue à l'infini.
- 80 Assurément, on pourrait, du point de vue du formalisme logique, s'indigner de ce que l'on passe d'une méthode mathématique à une autre pour réaliser une seule et même proposition.
- 81 Qu'on se souvienne cependant qu'il s'agit d'une proposition de physique et non d'une proposition de mathématique pure ! Qu'on se souvienne aussi que la cohérence ou rigueur n'est pas le seul critère dont la démarche du physicien se doit de relever ! Il faut bien aussi opérer des simplifications dans les situations « concrètes » expliquer, pourvu toutefois qu'on procède en cela avec « prudence » : Newton lui-même l'accorde, précisément en ce qui concerne l'usage que le physicien doit faire des méthodes mathématiques dans l'introduction du *De Quadratura*)<sup>31</sup> :
- [...] dans la méthode des fluxions il n'est pas besoin d'introduire en géométrie des figures infiniment petites. Toutefois, l'on peut effectuer l'analyse pour des figures quelconques, qu'elles soient finies ou infiniment petites et prises, en ce cas, comme semblables à des figures évanouissantes : pourvu que l'on procède avec prudence pour les figures qu'on prend de coutume pour infiniment petites dans la méthode des indivisibles.
- 82 C'est dire par là même que lorsque la nature du sujet l'exige, on peut par souci de simplification utiliser la méthode des infinitésimaux plutôt que la complexe méthode des premières et dernières raisons, en prenant toutefois certaines précautions.
- 83 Ne serait-ce pas précisément le cas au début de la Proposition I ? En effet, remarquons-le, Newton se garde bien ici de composer les résultats obtenus par la méthode des infinitésimaux avec ceux obtenus par la méthode des limites, comme plusieurs propositions formeraient un seul et même syllogisme par exemple. Ainsi, la force continue n'est pas obtenue par sommation des forces discrètes. Certes non. Mais, en revanche, combien il était plus simple de traiter le début de la proposition dans la terminologie des infinitésimaux, quoi qu'il fût tout à fait possible de produire des démonstrations autres et de concevoir comme des quantités fluentes tous les paramètres mathématiques intervenant pour rendre compte du phénomène physique qu'est le mouvement de n'importe quel corps dans une courbe quelconque. D'ailleurs, dans le *De Motu Corporum*, qui sert de canevas au livre I des *Principia*, la mesure de la force centripète s'effectue dès le début dans le langage du flux : il y est alors fait référence, non à la géométrie classique des triangles mais à celle du cercle et notamment à la raison variable entre le sinus versé d'un arc et le carré de cet arc quand les arcs diminuent infiniment. En ce cas, l'arc représente le flux uniforme du temps et le double du sinus

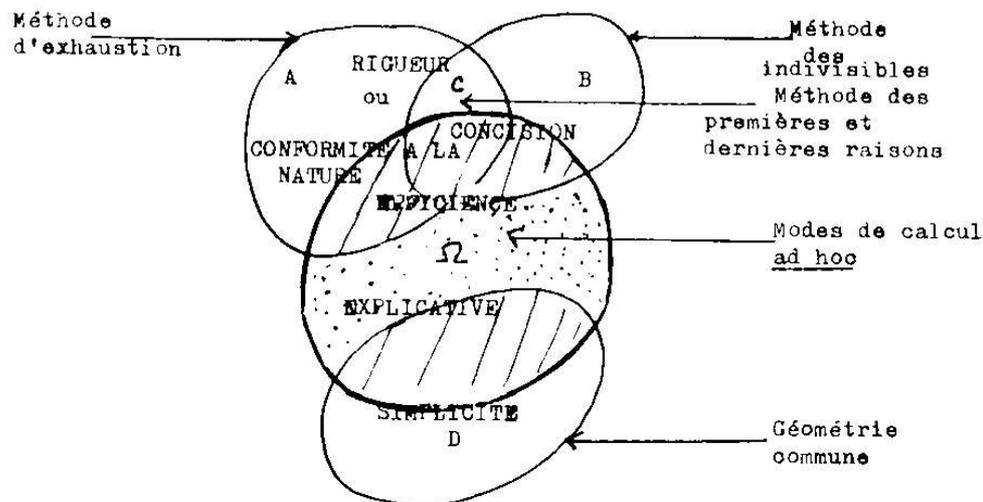
verse lui représente la distance dont le corps est détourné de son mouvement inertial par la force centripète en un mouvement évanouissant.

- 84 Il est indéniable cependant que la géométrie classique des triangles mise en œuvre au début de la Proposition I, est, pour un résultat identique, de maniement plus simple que la géométrie déployée au *De Motu*. Certes, la démonstration du *De Moro* aurait pu aussi être produite en cette proposition mais combien en aurait-elle alourdi les argumentations ! Ainsi, c'est bien en physicien, au sens moderne de ce terme et non au sens cartésien, que le savant raisonne : la rigueur n'est qu'un impératif hypothétique qui est tempéré par le souci de simplicité des définitions, construction et équations à produire.
- 85 À quoi bon développer dix pages de calcul pour le seul besoin de la cohérence logique quand on n'en peut mettre qu'une ? À quoi bon développer une page de calcul complexe quand on n'en peut produire qu'une, plus simple !
- 86 À quoi bon ce luxe de démonstration quand l'essentiel est de parvenir à démêler les fils de ce très complexe écheveau que tissent les « phénomènes de la nature » ! Autre est la démonstration pour le mathématicien, autre elle est pour le physicien.
- 87 II - 23. Certes, mais il est aussi des propositions – très rares dans l'ensemble des *Principia* – où Newton ne produit que des équations sans les cheminements qui les expliquent. Tel est le cas fameux de la proposition 35 du livre III : les équations des mouvements de l'orbite lunaire sont posées là, sans démonstration aucune. Tout au plus sont-elles introduites par les mêmes mots laconiques :
- Par la théorie de la gravité, j'ai trouvé l'équation du mouvement<sup>32</sup>...
- 88 Ainsi, le lecteur sait-il au moins que ces équations découlent du jeu complexe de lois d'attractions entre ce satellite, la terre et le soleil, tout au long des mouvements des deux premiers corps ! Mais, cela est bien peu pour retrouver les valeurs des équations susdites. Nombreux d'ailleurs furent les savants qui tentèrent de trouver le chemin qui aurait pu conduire Newton et durent s'avouer vaincus ; tels Clairaut, d'Alembert ou les pères minimes, Le Sueur et Jacquier.
- 89 Dès lors, on serait tenté de dire : à quoi servent de pareilles équations ? Précisément, on ne le saurait nier, elles ont permis d'établir les nouvelles tables du mouvement de la lune et tous ceux qui ultérieurement ont cherché à partir de modes de calcul autres que ceux connus de Newton, à établir ces équations, sont parvenus à très peu près aux mêmes résultats numériques. C'est bien dire par là même qu'à la différence d'un théorème mathématique, une proposition de physique tient sa valeur ultime de son efficacité dans l'explication des phénomènes naturels et des progrès techniques qui en découlent. Ceci dit, cette efficacité ne saurait être elle-même le produit de la seule intuition : elle résulte de toute évidence de la mise en œuvre de divers modes de calculs dont on ne peut que regretter après bien d'autres l'absence en la Proposition 35. Toutefois, cette absence même peut bloquer le progrès scientifique mais non le progrès des techniques : faute de connaître les procédés de démonstration, on se trouve dans l'impossibilité de les affiner et de progresser dans l'intelligibilité des phénomènes. Or, retrouver d'autres procédés de démonstration prend du temps et en ce sens, on ne saurait nier que, dépourvus des cheminements qui les ont fait établir, les propositions mécaniques de Newton n'aient pas servi le progrès de la science physique autant qu'elles le pouvaient. En revanche, cette absence de cheminements laisse intacte la valeur technique de ces propositions : ainsi, avant même que l'on découvre des procédés de démonstration de la Proposition 35, les

tables des mouvements de la Lune établies à partir des équations énoncées ont pu être appréciées utilement des astronomes, des géographes et des navigateurs.

### III

- 90 III - 1. Cela étant, on ne le saurait nier, la méthode des premières et dernières raisons qui est présentée en sa structure théorique comme une méthode adaptée à la mécanique et exclusive de tout autre de par son lien privilégié à la « nature », n'est plus en sa mise en pratique qu'un point de vue mathématique parmi d'autres sur cette nature. Mais si l'idée de l'adaptation privilégiée de cette méthode à l'explication des phénomènes naturels – c'est-à-dire à l'expression de leurs lois – est sérieusement remise en cause, celle de l'adaptation des différentes méthodes mathématiques aux problèmes physiques, elle, ne l'est cependant pas. Autrement dit, ayant rejeté le réalisme mathématique a priori en philosophie naturelle, Newton voit contraint d'écarter aussi au fil des propositions le réalisme mathématique a posteriori et d'admettre une pluralité d'approches mathématiques qui, composé entre elles, parviennent à donner une bonne approximation des lois mécanique de tous les corps appartenant au système solaire.
- 91 Dès lors, le schéma tracé plus haut à propos de la situation théorique de ce langage par rapport aux autres doit être modifié de la manière suivante pour exprimer la pratique de celui-ci et d'autres langages répertoriés en philosophie naturelle :



- 92 Ainsi, la partie intéressante pour le physicien n'est plus la même que celle qui était censée l'être exclusivement : c'est, en effet, non plus  $A \cap B$  dans son entier mais l'ensemble  $\Omega$  qui coupe à la fois A, B,  $A \cap B$  et D. Désormais, tout langage mathématique peut être accepté pour traduire les rapports des phénomènes entre eux pourvu toutefois que sa mise en œuvre n'occulte pas le processus physique à expliquer par sa trop grande rigueur ou concision ou simplicité. En outre, si le processus à expliquer est trop complexe pour être exprimé dans un seul de ces langages, le physicien peut « fabriquer » ses propres modes de calcul en les combinant entre eux : beaucoup des propositions du Livre III des *Principia*, notamment, nous semblent avoir été construites de cette manière. Telle, par exemple, certaines propositions sur les mouvements de la lune où Newton produit une explication composée de la théorie de la gravitation universelle et – pour rendre compte des

subtilités des mouvements de ce satellite qui échappent à cette théorie – au vieux système ptoléméen des épicycles.

- 93 Mais, ce faisant, les exigences théoriques d'une physique mathématique se sont considérablement émoussées puisque la méthode des limites n'est plus l'instrument privilégié d'expression des lois mécaniques. Bien plus, comment éviter la contradiction entre la pratique de la physique mathématique et sa théorie innervée par une métaphysique déterminée de l'être ? En effet, admettre de faire usage d'une pluralité de langages mathématiques en philosophie naturelle n'est en rien anodin si l'on s'en réfère à la Section 1 des *Principia* : ce n'est pas seulement passer d'un langage à un autre plus efficient, c'est aussi inévitablement passer d'une idée de « nature » à une autre et partant d'une idée de Dieu à une autre.
- 94 III - 2. Mais, à dire vrai, que pèse une telle contradiction entre le théoricien et le praticien de la physique ? Qu'importent les contradictions de l'homme si ces contradictions sont le signe que la conscience scientifique ébranle sur ses bases la toute puissante emprise métaphysique et se démarque d'elle implacablement au plan de l'efficace dans la maîtrise de la nature ? Que mesurent en effet ces contradictions sinon la conscience d'un écart entre une théorie de la physique dont des objets trouveraient être parfaitement conformes aux objets d'un langage mathématique donné et la science physique *de facto* ? Que mesurent-elles donc sinon la conscience que le rapport entre ces langages mathématiques et les situations expérimentales auxquelles on les confronte « ne tombe pas juste » ?
- 95 En fait, il semble que ce qui importe le plus à Newton des *Principia* c'est moins l'idée théologique et métaphysique de « nature » qui l'a guidé, vers 1664 dans le *De Gravitatione*, dans les concepts de « mouvement », « corps », « espace », « temps », fondateurs d'une science mécanique, que l'idée d'efficace explicative de ces mêmes concepts. Le reproche le plus fondamental qui est adressé à la mécanique cartésienne à un moment essentiel, soit, à l'articulation des livres 2 et 3, est à cet égard très significatif<sup>33</sup> :
- L'hypothèse des tourbillons répugne totalement aux phénomènes astronomiques et contribue moins à expliquer qu'à perturber les mouvements célestes. En vérité, l'on peut comprendre comment ces mouvements s'effectuent dans les espaces libres sans tourbillons à partir du livre premier mais c'est dans le système du monde qu'on va le montrer plus complètement.
- 96 Autrement dit, les concepts cartésiens des *Principes de Philosophie* de 1644 peuvent bien être ordonnés au sein d'une science elle-même enchassée dans un arbre organiquement consistant : ils demeurent à jamais stériles et un tel défaut est rédhibitoire dans une science de la nature.
- 97 C'est reconnaître par là même que dans la pratique de la physique on peut être « illogique » si la logique de notre esprit conduit à la stérilité d'explication, mais l'on ne peut sous aucun prétexte être infécond.
- 98 Ainsi, on le voit, produire une explication des phénomènes de la nature au moyen des langages mathématiques n'est pas aussi trivial qu'on pourrait le croire de prime abord. Les modalités d'une telle entreprise sont des plus complexes et relèvent toujours en dernière instance du « flair » du physicien, dans son « contact » avec les phénomènes et processus physiques.
- 99 C'est en cela que Newton nous semble être le fondateur de la physique mathématique : dans sa manière de penser les divergences entre l'approche du mathématicien et celle du

physicien. En effet, tandis que les scolastiques dans le sillage d'Aristote cultivent ces divergences, que Johann Képler tend à les effacer (*ubi materia, ibi geometria*<sup>34</sup>), Newton, lui, évite ces deux extrêmes, l'un trop pessimiste, l'autre trop optimiste : il pratique une démarche délicate, faite d'accord souple et toujours révisible entre les deux approches mathématicienne et physicienne. Or, qu'on nous permette ici une comparaison d'actualité ! Ces divergences sont si vivantes aujourd'hui encore, ainsi que l'espoir d'y remédier – le mathématicien accusant le physicien de manque de rigueur et le physicien lui renvoyant la balle en l'accusant de lenteur – que l'intérêt se cristallise autour d'une voie nouvelle : celle de l'analyse non-standard, créée en 1974 par Abraham Robinson et en laquelle se dessine un espoir de réconcilier les intérêts des belligérants.

- 100 En effet, on appelle « standard » un nombre ou une fonction qu'il est possible à l'homme ou à ses machines (ordinateur) d'écrire et « non-standard » un nombre ou une fonction si complexe qu'il est impossible de l'écrire. Or, précisément, cette différence qualitative entre nombres ou fonctions standards et non standards a permis de trouver des règles de calcul de la plus haute importance pour la « physique mathématique ». Comme l'écrit tout récemment Jean Harthong<sup>35</sup>

[...] on peut considérer le physicien qui étudie le comportement macroscopique d'un phénomène dont le comportement microscopique est trop complexe pour lui, comme un observateur limité qui ne peut saisir que l'ombre des choses. Le comportement microscopique sera décrit par des fonctions non standard qui ne pourront être spécifiées, mais dont on pourra connaître suffisamment de propriétés abstraites, et surtout, auxquelles on pourra appliquer toutes les lois de l'arithmétique et du calcul infinitésimal (multiplication, dérivation, etc.). Les règles de calcul de l'ombre donneront alors tout naturellement les lois du comportement macroscopique. Cette forme de raisonnement est le fondement même de la physique théorique qui trouve ainsi la mathématique qu'il lui fallait.

- 101 On le voit, les préoccupations mathématiciennes de Newton dans les *Principia* sont loin d'être dépassées. Tant s'en faut ! La recherche d'un langage mathématique adapté à cette science complexe pour l'esprit humain qu'est la physique demeure toujours actuelle. Par où, l'exemple de la mécanique Newtonienne nous semble avoir valeur d'exemplarité à l'égard de la démarche constitutive de la physique mathématique, et ce même si elle reste marquée par le sceau d'une ineffaçable contradiction : celle qui oppose la théorie et la pratique de la physique dite mathématique et qui empêche Newton d'accepter en toute bonne conscience l'arbitraire des langages mathématiques dans leur expression des phénomènes. Car, en dépit de cette contradiction, se fait jour, à travers la pratique de ces langages, l'idée que la physique n'accède pas à la scientificité par simple application de langages importés, qu'il est difficile au physicien de trouver une « langue bien faite » pour les phénomènes naturels, un « prêt-à-porter » pour eux : on ne peut trouver que des langages à adapter ou à composer entre eux dans le dessein modeste d'approcher de l'objet physique aussi rigoureusement que nécessaire et efficacement que possible. Qu'est-ce à dire sinon que la physique ne devient pas mathématique par une nécessité interne ?
- 102 Mais, en ce cas, pourquoi donc écrire des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle ? Mais, après tout, « why not as a mathematician ? » puisque l'on n'a pas encore trouvé de meilleur moyen d'investigation. Toutefois, si d'aventure il s'en présentait de plus fécond, alors sans doute faudrait-il réexprimer la philosophie naturelle comme il convient.

## NOTES

1. Telle est, par exemple, la thèse de P. DUHEM dans l'*Essai sur la notion de théorie physique* (1982, p. 2) pour lequel « le degré de perfectionnement » de la science de la nature vient de ce que « le langage mathématique sert à exprimer les lois découvertes par des expériences précises ».
2. Nous avons choisi les *Principia* plutôt que l'*Optique* parce qu'en cette œuvre-là qui inaugure la mécanique classique, toutes les propositions font l'objet de démonstrations mathématiques nombreuses et complexes, ce qui n'est pas le cas de l'*Optique*.
3. *La Méthode des fluxions et des suites infinies*, trad. Buffon 1740, p. 21, § LVII.
4. *De Quadratura, Opera*, III, 1964, Stuttgart, p. 204, Introduction.
5. La traduction est tirée de : *Les Principia mathematica de Newton, (traduction nouvelle, postface et bibliographie établie par M-F. BIARNAIS, ed. Bourgeois, 1985, p. 63.*
6. *Méthode, op. cit.*, p. 21, § LIX.
7. *Les Principia, op. cit.*, p. 117.
8. *Correspondence of Newton*, Hall, C.U.P., Newton to Cotes, 1713, V, p. 399.
9. *Newton to Cotes*, 1713, p. 420.
10. *Les Principia, op. cit.*, p. 20.
11. *Les fondements de la mécanique classique : le « De Gravitatione de Newton »*, M-F. BIARNAIS, Les Belles-Lettres, 1985, p. 44.
12. *De Quadratura, op. cit.*, p. 203-204.
13. Le titre de la Section 1 en témoigne : *De Methodo rationum primarum & uli marum, cujus ope sequentia demonstratur.*
14. *Les Principia, op. cit.*, p. 64.
15. *Méthode, op. cit.*, p. 24, Problème I, X.
16. *De Quadratura, op. cit.*, p. 204.
17. *Méthode*, p. 24.
18. *Id.*, p. 25, XIII.
19. *De Quadratura*, p. 204.
20. *Id.*, p. 204.
21. *Les Principia, op. cit.*, p. 65.
22. Il n'y a pas à proprement parler identité entre la philosophie naturelle et la « physique » actuelle. Car, comme en témoignent le *Scholie* de 1713 et bon nombre de lettres, la philosophie newtonienne inclut la théologie naturelle : le système du monde, en effet, prouve l'existence d'un Dieu intelligent et bon. Or, cette preuve même relève de la philosophie naturelle selon Newton.
23. *Les fondements, op. cit.*, p. 72.
24. Nous renvoyons ici, pour complément d'étude, aux remarquables développements de Mac-Laurin dans le *Traité des Fluxions*, Tome II, p. 1 à 12.
25. *Les Principia, op. cit.*, p. 65.
26. *Id.*, Cf., *Préface* à la 1<sup>re</sup> édition, p. 14.
27. *Les fondements, op. cit.*, p. 16.
28. *Correspondence of Newton*, III, to Halley, 1687.
29. *Les Principia, op. cit.*, p. 74-75.
30. *Principia*, réédition de 1871, Glasgow, Liber Primus, p. 39 : « Augeatur jam numerus & minuatur latitudo, etc ».
31. *De Quadratura, op. cit.*, p. 207.
32. *Les Principia, op. cit.*, p. 102.

33. Id., p. 72, 73.

34. KÉPLER, *De Fundamentis Astrologiae certioribus, thesis XX*, p. 423.

35. *La Recherche*, n°148, octobre 1983, p. 1200.

---

AUTEUR

MARIE-FRANÇOISE BIARNAIS

Nantes